

ЭКЗАМЕН по ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ и ИНФОРМАТИКЕ

24.07.2024

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вариант 1

Задача 1. На плоскости даны точки $A(0, -1)$, $B(-4, 6)$ и C (ее координаты неизвестны). Напишите общее и параметрическое уравнение прямой AC , зная координаты точки $M(-1, 2)$ — середины стороны BC треугольника ABC .

Задача 2. Проверьте, что вектор-функция $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$, где

$$P(x, y) = e^x \cos y - e^y \cos x, \quad Q(x, y) = -e^x \sin y - e^y \sin x,$$

является градиентом некоторой функции $U = U(x, y)$. Найдите функцию U , если известно, что $U(0, 0) = 0$.

Задача 3. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u|_{t=0} = \cos x \sin y$$

в классе ограниченных на области $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, дважды дифференцируемых функций: по формуле Пуассона, или разделением переменных, или подбирая частные решения.

Задача 4. Докажите эквивалентность логических формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, если

$$\mathcal{A} = ((x \oplus (yz)) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow (y \rightarrow z))), \quad \mathcal{B} = (x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow x)).$$

Задача 5. Оператор A в пространстве многочленов степени ≤ 3 действует по правилу:

$$A : p(x) \mapsto x^2 p''(x) + p'(2x).$$

а) Найдите базис в образе оператора.

б) Выясните, лежит ли многочлен $p(x) = 1 - x^2$ в ядре оператора A .

Задача 6. Имеется 4-мерный массив $X = X[i_1, i_2, i_3, i_4]$, каждый индекс i_k которого может принимать значения от 0 до N . Вам нужно построить новый 4-мерный массив Y , элементы которого должны принимать следующие значения: $Y[i_1, i_2, i_3, i_4] = \min\{X[j_1, j_2, j_3, j_4]\}$, где $|j_k - i_k| \leq M$ и индекс j_k не выходит за пределы массива. Напишите программу на Вашем любимом языке программирования.

Входные данные.

В первой строке входного файла `data.txt` задаются числа N и M , $1 \leq M \leq N \leq 100$. Остальные строки файла содержат элементы массива X в виде, который может быть считан псевдокодом:

```
for (i = 0; i ≤ N; i++)
for (j = 0; j ≤ N; j++)
for (k = 0; k ≤ N; k++)
for (l = 0; l ≤ N; l++)
readX[i, j, k, l]
```

Выходные данные.

Программа должна создать файл `res.txt` и записать в него массив Y в том же формате, в котором даны входные данные.

Задача 7. Напишите программу на Вашем любимом языке программирования для решения уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона с точностью 10^{-5} , если

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt - 0.45.$$

Производную вычислите аналитически. Используйте квадратуру Симпсона для вычисления интеграла. Программа должна вывести на экран одно число с восемью знаками после запятой.