Экзамен по предмету "Математика" для поступающих в магистратуру по направлению "Механика и математическое моделирование" Факультет космических исследований МГУ имени М.В.Ломоносова

25 июля 2020 года. Вариант 1.

Во всех задачах нужно привести полное решение.

Задача 1. *На плоскости* Oxy *ввели новые координаты* $\begin{cases} u = y - 2x, \\ v = y + 2x. \end{cases}$ *Какую наименьшую положительную площадь может иметь треугольник, координаты вершин которого в новой системе являются целыми числами?*

1/8

Задача 2. *Динамическая система задана системой дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) - x(t), \\ y'(t) = x(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

а) Найдите общее решение системы.
б) Найдите частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
в) Является ли точка $x = 0$, $y = 0$ *устойчивым положением равновесия для этой системы?*

$x = Ae^t - 2Be^{-2t}$, $y = Ae^t + Be^{-2t}$; $A = 1/3$, $B = -1/3$; нет

Задача 3. *Векторы* $\vec{e}_1$ *и* $\vec{e}_2$ *имеют координаты*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

а) Проверьте, что $\vec{e}_1$ *и* $\vec{e}_2$ *ортогональны и найдите вектор* $\vec{e}_3$ *единичной длины, такой, что тройка* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *является правым ортогональным базисом в* $\mathbb{R}^3$.
б) Найдите объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ *и* $\vec{e}_3$.

$\frac{1}{\sqrt{410}}(20 \ \ -1 \ \ -3)$; $2\sqrt{410}$

Задача 4. *Случайные величины* a *и* b *равномерно распределены на отрезке* $[-1, 1]$. *Какова вероятность того, что окружность* $(x-a)^2+(y-b)^2 = 1$ *не имеет общих точек с прямой* $x = y$?

$1.5 - \sqrt{2}$

Задача 5. *Найдите решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа* $u_{xx}+u_{yy} = 0$ *в круге* $x^2 + y^2 < 1$ *с граничным условием* $u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sin 2\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$u(x, y) = 2xy$

Экзамен по предмету "Математика" для поступающих в магистратуру по направлению "Механика и математическое моделирование" Факультет космических исследований МГУ имени М.В.Ломоносова

25 июля 2020 года. Вариант 2.

Во всех задачах нужно привести полное решение.

Задача 1. *На плоскости Oxy ввели новые координаты* $\begin{cases} u = 2y + x, \\ v = 2y - x. \end{cases}$ *Какой наименьший положительный периметр может иметь треугольник, координаты вершин которого в новой системе являются целыми числами?*

$(\sqrt{5}+1)/2$

Задача 2. *Динамическая система задана системой дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = 6x(t) - y(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

а) Найдите общее решение системы.
б) Найдите частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = -1$.
в) Является ли точка $x = 0$, $y = 0$ устойчивым положением равновесия для этой системы?

$x = Ae^{-3t} + Be^{2t}$, $y = -3Ae^{-3t} + 2Be^{2t}$; $A = 1/5$, $B = -1/5$; нет

Задача 3. *Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имеют координаты*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

а) Проверьте, что $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ортогональны и найдите вектор $\vec{e}_3$ единичной длины, такой, что тройка $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ является правым ортогональным базисом в $\mathbb{R}^3$.
б) Найдите объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

$\frac{1}{\sqrt{114}}(8 \ 7 \ -1)$; $2\sqrt{114}$

Задача 4. *Случайные величины a и b равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Какова вероятность того, что окружность $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ имеет хотя бы одну общую точку с прямой $y = -x$?*

$\sqrt{2} - 0.5$

Задача 5. *Найдите решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в круге $x^2 + y^2 < 1$ с граничным условием $u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos 2\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.*

$u(x, y) = x^2 - y^2$